

**BIBLIOTECA SCIENTIFICA**

67

DELLO STESSO AUTORE:

*Breve storia dell'infinito*

*Gnomon*

*La dittatura del calcolo*

*La matematica degli dèi e gli algoritmi degli uomini*

*La ribellione del numero*

*Numero e logos*

*Paolo Zellini*

# DISCRETO E CONTINUO

STORIA DI UN ERRORE



ADELPHI EDIZIONI

© 2022 ADELPHI EDIZIONI S.P.A. MILANO  
WWW.ADELPHI.IT  
ISBN 978-88-459-3677-7

Anno  

---

2025 2024 2023 2022

Edizione  

---

1 2 3 4 5 6 7 8

## INDICE

1. I diavoli di Rabelais	13
2. L'inizio	22
3. Il continuo di Aristotele	33
4. Altari vedici e formule incrementalì	41
5. Il flusso dei numeri	54
6. Numeri di Fibonacci e algoritmi veloci	68
7. Taglio e continuità	73
8. Il taglio del <i>lógos</i>	83
9. Limiti e continuità: origine algoritmica	89
10. Il continuo di Bernard Bolzano	101
11. Valori intermedi	109
12. Il salto del demone	116
13. Il punto	123
14. Finzioni	131
15. L'euforia del discontinuo	139
16. Il continuo di Cantor	147
17. Contrazione delle distanze	156

18. Funzioni differenziabili	164
19. Equazioni e atomismo	172
20. Matrici	181
21. Il residuo matematico	196
22. Un edificio costruito sulla sabbia	214
23. Il Congresso di Parigi	224
24. Discretizzazione	232
25. Precondizionamento	246
26. Continuità e stabilità	257
27. Problemi di minimo	268
28. Immagini matematiche	283
29. Tempo matematico e tempo vissuto	301
30. Il continuo come approssimazione del discreto	324
Note ai capitoli	335
<i>Note</i>	361
<i>Indice dei nomi</i>	397

*a Mariella*





# DISCRETO E CONTINUO



## I DIAVOLI DI RABELAIS

Quando sentiamo intorno a noi assordanti fragori o trambusti, non diciamo di solito che è un baccano del diavolo? Ma perché proprio del diavolo, viene da chiedersi, perché in fondo, cosa c'entrano i diavoli con i rumori e gli schiamazzi?

Fa riflettere su questo tema un fantastico e imprevedibile testo di Rabelais, che è pure un brevissimo e acuminato saggio di demonologia, del tutto coerente con lo spirito di un'epoca, il XVI secolo, in cui, come constatava Lucien Febvre, la presenza dei demoni si avvertiva ovunque e finiva per assillare gli ingegni più illuminati.<sup>1</sup>

Nel capitolo XXIII del *Libro terzo* intitolato *Dei fatti e detti eroici del buon Pantagruele* assistiamo a una prova didattica surreale, una specie di sberleffo ad opera di Panurge, figura comica ed esuberante, un po' imbroglione e capace di tutto (dal greco πανούργος). La lezione che Panurge impartisce a uno sprovveduto fra' Giovanni è anche una parodia dei processi enumerativi che si incontrano nella tradizione greca ed ebraica, come pure, dopo Rabelais, nel *Don Chisciotte* di Cervantes.

Queste le parole di Panurge: « E quando tu vedi l'urto

di due armate, pensi forse tu, coglionaccio (*couillasse*), che quel rumore così grande e orribile che si sente, venga da voci umane, dall'urto delle armature, dal tinnir delle barde, dallo schioccar delle mazze, dal frusciar delle picche, dallo spezzar delle spade, dal gridar dei feriti, dal suono dei tamburi e delle trombette, dal nitrir dei cavalli, dal tuonare degli schioppetti e dei cannoni? Tutto ciò vi entra pur per qualche cosa, debbo ammetterlo. Ma lo spavento e il fragore più enorme vengono dal dolore e dall'ululare dei diavoli; i quali, stando là in mezzo e tutti a far la posta a quelle povere anime dei feriti, ricevono dei colpi di spada inaspettati, e patiscono soluzione nella continuità (*pâtissent solution en la continuité*) delle sostanze loro aeree e invisibili». <sup>2</sup>

Ora la chiave di tutto sembra consistere in quel concetto enigmatico che ha da sempre intrigato filosofi e teologi, fisici e matematici, quello cioè di *continuità*. Fino alla matematica dell'ultimo secolo, della continuità si sono date le più svariate definizioni, ma tutte miranti a precisare in qualche modo l'idea generale e intuitiva di un agglomerato di oggetti – numeri, punti, istanti temporali – caratterizzato da un'assenza di lacune o di salti. Grazie a un'idea plausibile di continuo, si è voluta garantire, in ogni tempo e in ogni luogo, la possibilità di ordinare l'universo mediante connessioni e articolazioni che non lasciassero vuoti. Nel cosmo antico l'ordine del tempo doveva consistere in successioni di cicli che si saldavano l'uno con l'altro con assoluta precisione, senza discrepanze, e dall'analisi del continuo sono dipesi l'analisi della struttura della materia, gli studi sulla natura del numero e della geometria, come pure la possibilità di definire modelli di fenomeni naturali o artificiali mediante sistemi di equazioni. Tuttavia, neppure nei più recenti formalismi matematici si è mai raggiunto l'obiettivo di una precisazione conclusiva di che cosa significhi la saldatura o l'intimo nesso che dovrebbe legare tra loro gli elementi che compongono un insieme

continuo. Ogni epoca, peraltro, ha indagato sull'idea di continuo mettendo in campo le sue speciali prerogative, il suo modo peculiare di dare forma e ordine all'universo. Per capire il significato della continuità nel testo di Rabelais conviene allora riferirsi al ruolo della magia e della demonologia nel XVI secolo messo in evidenza, negli ultimi decenni, in una ormai vasta letteratura. Tuttavia un tema fondamentale, quello della gradualità del legame tra i generi, tra il genere più elevato degli dèi e il genere ultimo, inferiore e meno perfetto, delle anime, non era sfuggito ai filosofi neoplatonici. Giamblico notava che i generi intermedi completano, rendendolo indivisibile, il nesso di continuità fra gli estremi e che in particolare il genere dei demoni e quello degli eroi stabilivano un legame ininterrotto e una scala continua di affinità intermedie tra Dio e l'anima (*I misteri egiziani*, I, 19-20).

Daniel P. Walker, tra i primi a sottolineare il ruolo della magia e dell'ermetismo in età rinascimentale, notava che nel Cinquecento erano specialmente i filosofi neoplatonici a coltivare arti magiche e teurgiche nella convinzione di poter raggiungere Dio lungo una scala continua che dal mondo sensibile saliva fino alle più alte emanazioni del divino, attraversando le stelle e i loro demoni.<sup>3</sup> Caratteristica della tradizione ermetica era la convinzione che l'universo è pieno fino all'esaurimento di forze che sono proprie dei corpi divini come di quelli corruttibili e che agiscono sugli esseri animati come su quelli inanimati.<sup>4</sup> In una visione gnostico-apocalittica questo *plenum* di forze era destinato a promuovere un fermento di energie e un'esuberanza di attività che potevano favorire la moltiplicazione e il rafforzamento dei sistemi di potere demonico in quel regno mondano in cui, per lo gnostico, sarebbe stata esiliata la nostra vita.

Demone è comunque sinonimo di sostanza spirituale che può assumere diverse possibili connotazioni, dalla sostanza angelica a quella diabolica, dalla divinità astra-

le al δαίμων greco, sinonimo di destino, e al *genius* latino. Deputati a riempire ogni possibile spazio o intervallo tra gli uomini e Dio, i demoni potevano disporsi in una linea verticale dalla terra fino al cielo, come la scala del sogno di Giacobbe lungo la quale salivano e scendevano gli angeli (*Genesi*, 28, 12). Ma nel Cinquecento era pure diffusa l'idea che ciò che rende possibili la vita e le operazioni dei demoni sono mutui legami configurabili come corde o lacci di varia natura. Giordano Bruno, tra gli altri, sosteneva che i corpi non sono residenze per anime separate l'una dall'altra, ma nodi locali di un corpo universale dotato di vita e di intelligenza, una immensa compagine tenuta assieme da innumerevoli nessi e collegamenti.

La continuità tra spirito e corpo si estendeva alla natura demoniaca. « Daemones incorporei non sunt » asseriva Michele Psello,<sup>5</sup> i demoni non sono senza corpo. Della continuità già si disquisiva, peraltro, nella filosofia patristica, e le creature angeliche e demoniche ereditavano in qualche misura l'essenza indivisa della sostanza suprema. Clemente Alessandrino notava che il Logos del Prologo di Giovanni esiste nel seno del Padre indivisibile, *senza parti*, Dio unico. Ne seguiva che ogni cosa è stata fatta da Lui, nella sua immutabile identità, in conformità a un'operazione continua (προσεχῆ). Nelle sfere superiori non ci sono differenze o divisioni in parti. Il Figlio unigenito (Μονογενής) è dotato di una forma (ιδέα) propria, sovrana e incontaminata, ed è *direttamente* (προσεχῶς) partecipe, senza intermediari, della potenza (δύναμις) del Padre.<sup>6</sup> Benché numericamente distinti, i sette Protocristi (Πρωτόκτιστοι, Primi-Creati), figure accostabili per un verso ai *ῥῆσι* della tradizione vedica, collocati in una posizione superiore a quella degli arcangeli nella gerarchia celeste, grazie all'unità del loro operare formavano un'unità omogenea e inscindibile. Per Clemente « uno spirito *non esisterebbe* neppure se non avesse una sostanza o un'essenza implicanti una

forma (μορφή), un contorno (εἶδος), una figura (σχῆμα) e, per riassumere, un corpo (σῶμα)». <sup>7</sup> Clemente giunge ad asserire che «l'anima è pure un corpo», <sup>8</sup> un corpo psichico, invisibile ma suscettibile di farsi corpo pneumatico, ovvero «spirituale».

Agendo in modo indiscriminato in ogni tempo e per ogni dove, i demoni dovevano dunque contare su tutte le possibili giunture che consentissero un transito ininterrotto e continuo tra visibile e invisibile, tra corpo e spirito. Chi più di loro poteva allora percepire lo *horror vacui* e fiutare il pericolo di una soluzione di continuità? Il Principio di continuità era un presupposto irrinunciabile dell'efficacia del loro intervento in tutte le regioni dell'universo e in tutti i recessi del mondo sublunare.

Per questo motivo, c'è da credere, i diavoli di Rabelais temevano i colpi di spada, il cui effetto si estendeva dai corpi materiali alle sostanze aeree di cui erano fatti. Non si contano, a questo riguardo, i possibili riferimenti ad autori e scienziati dell'epoca. E gli aneddoti certo non mancano. Rabelais ricorda in particolare il caso di Gian Giacomo Trivulzio (confermato dai resoconti di Brantôme), che si distinse in molte occasioni per il suo talento militare. Quando morì a Chartres nel 1518, Trivulzio volle tenere in pugno la sua spada fino alla fine, «mulinando tutto intorno al letto, da uomo valoroso e cavalleresco com'era, in modo da mettere in fuga con quella scherma tutti i diavoli che stavano lì per sorprenderlo sul passo della morte». <sup>9</sup> Il coltissimo filosofo gesuita Martín Del Río (1551-1608) ricordava che Paracelso era solito alzarsi dal letto nottetempo, brandendo la spada contro nemici invisibili. <sup>10</sup>

Un frammento dell'*Hymne des daimons* di Pierre de Ronsard, intorno alla metà del Cinquecento, attestava che i demoni temono i coltelli e si nascondono non appena vedono una spada, per la paura di sentire tagliati i loro legami. <sup>11</sup> Jean Bodin, il celebre filosofo politico, eco-

nomista e magistrato, autore di una ponderosa *Demonomania de gli stregoni* (1580), una guida per istruire processi di stregoneria, ricordava una diceria degli antichi, per i quali « i Demoni patiscono divisione », <sup>12</sup> e dunque sono sensibili ai tagli dei lacci da cui sono legati.

Dopo la creazione del mondo, secondo la visione di Bodin e di molti altri, Dio si era ritirato in una sorta di inattività, lasciando ad angeli e demoni il compito di eseguire il suo immutabile volere. I diavoli erano spiriti vendicatori: a loro era demandato l'esercizio della giustizia divina mediante punizioni, tormenti e distruzioni. <sup>13</sup> Un esercizio tanto più efficace quanto più pieno e continuo – e perciò percorribile senza salti o lacune – era il *medium* tra anima e corpo, tra sostanza aerea e materiale, in tutte le nostre attività, compresi il mangiare e il dormire, il bere e il digerire. <sup>14</sup>

Anche i riferimenti ai classici non mancano. Panurge ricorda che Ercole, quando scese nell'inferno, non fece tanta paura ai diavoli, munito com'era solo di una clava e di una pelle di leone, quanta ne fece Enea, « coperto di un'armatura e armato di uno spadino bene in ordine, bel lustro e sgurato per opera del consiglio della Sibilla Cumana ». <sup>15</sup> Né manca un riferimento nella tradizione ebraica: si racconta che a Matusalemme fu affidata una spada, recante inciso il nome di Dio, con la quale poteva uccidere i demoni e che Agrimas, nato dal seme di Adamo, e padre di novecentomila demoni e *lilit*, si recò da Matusalemme per implorarlo di arrestare il loro sterminio. <sup>16</sup>

Giordano Bruno dedicava diverse pagine allo studio della continuità geometrica, e lo faceva toccando una delle questioni essenziali e più delicate per definire il concetto di continuo: la natura dei punti geometrici definiti dalle intersezioni tra curve, in particolare rette e cerchi. Gli ordini dei demoni si dovevano contemplare nell'intersezione dei cerchi. « Che grande potere, si tro-



va » notava il filosofo di Nola « nell'intersezione dei cerchi! ». <sup>17</sup>

A un *medium* di collegamento tra corpo e anima, tra inferiore e superiore convergenti reciprocamente l'uno all'altro, si riferiva anche Gerolamo Cardano, il grande scienziato del Cinquecento a cui si devono studi di filosofia, di medicina e di matematica, noto soprattutto per gli importanti progressi nella risoluzione di equazioni algebriche. Coerente con lo stile del tempo, Cardano, che ben conosceva il *Demone di Socrate* di Plutarco, scriveva sulla natura dei demoni con la stessa naturalezza con cui calcolava le soluzioni delle equazioni di terzo grado, ritenute a lungo insolubili. L'intelligenza umana era da lui concepita nei termini di una possibile comunicazione con « menti superiori »: la stessa identità intellettuale di un individuo doveva dipendere dal suo modo di percepire e di rispondere ai segnali che queste menti erano in grado di inviargli. È noto che Srinivasa Ramanujan considerava le sue prodigiose intuizioni matematiche come il frutto di una intuizione divina. « Un'equazione non significa nulla per me se non esprime un pensiero di Dio » <sup>18</sup> soleva ripetere.

Nello studio delle equazioni Cardano si serviva di un *criterio dei valori intermedi*, anche se non lo formulava esplicitamente, che consisteva in una semplice osservazione: quando una grandezza, inizialmente minore di un'altra, cresce fino a superarla, allora deve esserci uno stato intermedio in cui le due grandezze sono uguali. Ricorrendo a una curva disegnata sul piano cartesiano, si trattava di connettere o saldare la parte della curva che sta sotto l'asse delle ascisse a quella che sta sopra. Senza questa saldatura non c'è continuità, i due tratti di curva rimangono divisi senza rimedio. Il punto di saldatura, quello in cui i due pezzi si univano sull'asse delle ascisse, era la radice dell'equazione.

Era questo un criterio di continuità pressoché indispensabile ai matematici, rimasto come verità ovvia e in-

tuitiva per oltre due millenni, da Euclide (che inspiegabilmente non la inserì tra gli assiomi della sua geometria) fino a Bernard Bolzano (1781-1848), che ne dette una prima dimostrazione rigorosa in termini puramente analitici (cioè senza riferirsi alle idee intuitive di tempo e di spazio) nel 1817. Il teorema di Bolzano si configurò davvero come uno dei pilastri dell'analisi, e la sua importanza non fu certo solamente teorica. Esso permetteva di dimostrare che sull'asse continuo esistono le radici reali di certe equazioni cubiche, e più tardi di qualsiasi equazione sotto opportune ipotesi. La dimostrazione di esistenza delle radici era un presupposto necessario per un loro successivo calcolo approssimato, un processo computazionale destinato a restare un modello di riferimento per qualsiasi formalizzazione del concetto generale di algoritmo. Era ciò che Cardano designava col nome di *regula aurea*. Agli studi di Cardano seguirono quelli di Rafael Bombelli, a cui si deve l'introduzione dei numeri complessi e, poco tempo dopo, la prima edificazione del calcolo algebrico e dell'analisi moderna, ad opera di Viète e di Newton, con metodi analitici non troppo distanti, per ciò che riguarda le tecniche di principio, da quelli di Cardano e di Bombelli. All'efficienza del calcolo algebrico del Seicento deve ancora rapportarsi il calcolo digitale su grande scala della nostra epoca.

Sarà pure una coincidenza, ma non si può evitare di rammentare che verso la fine del XIX secolo Richard Dedekind introduceva la nozione di numero reale come sezione o taglio (*Schnitt*) del corpo dei numeri razionali, elaborando così una teoria dei numeri reali come corrispondente aritmetico dell'idea geometrica di continuità.

Si può presumere che fu la credenza nell'esistenza dei demoni a propiziare lo studio di un principio matematico di continuità nel XVI secolo? Difficile rispondere di sì, almeno se la domanda mira alla ricerca di una correlazione diretta di causa ed effetto. Eppure si deve poter

vedere anche nella matematica l'impronta caratteristica di una qualsiasi scienza sperimentale, quella di una costruzione graduale e collettiva che si avvale di analogie e di paralleli, più o meno fortuiti e asistematici, tra diverse esperienze e discipline. Forse allora non è un caso che il termine « continuo », che esprime più di ogni altro il concetto sempiterno di una grandiosa « catena dell'essere », priva di salti e lacune e capace di tenere insieme l'immensa compagine del creato, si ritrovi in ogni epoca in tante figure e narrazioni che lo rappresentano fedelmente. Ancora una conferma di quello che segnalava Norbert Wiener, il grande studioso di cibernetica del secolo scorso, circa la stretta correlazione tra la scienza e il suo tempo storico: « Il pensiero di ogni epoca » egli notava « si riflette nella sua tecnica ». <sup>19</sup>