

In questo suo primo libro, Zellini ha seguito passo per passo l'evoluzione storica della nozione matematica di infinito, e al tempo stesso l'ha riavvolta in quelle ricche speculazioni mitiche, teologiche e letterarie che da sempre l'hanno accompagnata. Dalla sconvolgente scoperta pitagorica dei numeri irrazionali allo *horror infiniti* che serpeggia in tutta l'antichità, fino all'abbagliante « paradiso » di Cantor – e alla subitanea cacciata da quel paradiso, con la scoperta delle antinomie che metteranno in crisi i fondamenti della scienza.

Paolo Zellini è professore di Analisi numerica all'Università di Roma Tor Vergata; fra i suoi libri apparsi presso Adelphi ricordiamo anche *La ribellione del numero* (1985), *Numero e logos* (2010) e *La dittatura del calcolo* (2018).

Paolo Zellini

Breve storia dell'infinito



ADELPHI EDIZIONI

Prima edizione in questa collana: gennaio 2021

© 1980 ADELPHI EDIZIONI S.P.A. MILANO

WWW.ADELPHI.IT

ISBN 978-88-459-3553-4

Anno

2024 2023 2022 2021

Edizione

1 2 3 4 5 6 7

INDICE

1. L'ἄπειρον di Aristotele. Il limite e l'illimitato	11
2. Il limite	31
3. Numeri irrazionali	57
4. L'infinito di san Tommaso	79
5. Infinito categorematico e infinito sincategorematico	91
6. Giordano Bruno, Niccolò Cusano, Raimondo Lullo	105
7. L'eguaglianza	121
8. Cartesio	137
9. Leibniz	147
10. Il principio degli indiscernibili. Le classi	169
11. L'infinito attuale. Indefinito e transfinito	187
12. Le antinomie	217
13. L'infinito aperto	239
<i>Indice dei nomi</i>	259

BREVE STORIA DELL'INFINITO

I

L'ἄπειρον DI ARISTOTELE. IL LIMITE E L'ILLIMITATO

«C'è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l'Etica; parlo dell'Infinito». Così J.L. Borges introduce la sua breve biografia dell'Infinito in *Otras Inquisiciones*. Ma anche altrove traspare la sua concezione dell'infinito, spesso dissimulato in idee ad esso collegate, come assoluto male metafisico, operante nel cosmo come seme di disordine e assurdit . Non c'  nulla di pi  pericoloso della perdita del limite e della misura: l'errore dell'infinito   la perdita del valore contenuto nella relativa perfezione di ci  che   concretamente determinato e formalmente compiuto, ed induce perci  a smarrirsi nel nulla o in un labirinto senza via d'uscita.

Per rintracciare i fondamenti di una simile idea dell'infinito un inizio promettente potrebbe essere l'ascolto di un suggerimento di I. Kant: «Nonostante la grande ricchezza delle nostre lingue,» egli scrive «il pensatore si trova spesso in imbarazzo riguardo ad una espressione che si adatti esattamente al suo con-

chetto, mancando della quale egli non può farsi intendere rettamente dagli altri, e neppure da se stesso. Coniare nuove parole, è una pretesa di legiferare in materia di linguaggio, la quale di rado ha successo; e prima di ricorrere a questo mezzo disperato, è consigliabile cercare in una lingua morta e dotta, per vedere se non vi si trovi questo concetto assieme alla sua espressione adeguata». ¹

Per trovare una giustificazione metafisica allo *horror infiniti* e al fascino labirintico dell'infinità che segnano l'esperienza letteraria di Borges si potrebbe allora ricorrere ad una parola greca e trasferire momentaneamente ogni pensiero e considerazione al punto di vista deducibile dalla metafisica di Anassimandro, dei Pitagorici o di Aristotele. Nel pensiero greco alludere all'infinità voleva dire ricorrere a un termine di significato certamente non identico a quello racchiuso nel nostro « infinito ». Il termine che lo designava era ἄπειρον, che vuol dire letteralmente « senza limiti » (limite in greco era πέρας) e quindi « illimitato ». La sfera di significati tradizionalmente racchiusi nel termine ἄπειρον non rende certamente troppo inverosimili alcune asserzioni aristoteliche che ne svelano la natura da un lato divina e incorruttibile ma dall'altro ambigua e refrattaria ad ogni accostamento e tentativo di comprensione. Aristotele non esitò, innanzitutto, ad attribuire all'infinito valore di principio. Nella *Fisica* (203 b 6) si legge che « Ogni cosa o è principio o deriva da un principio: ma dell'infinito non c'è principio, ché sarebbe il suo limite. Inoltre è ingenerato e incorruttibile, in quanto è un principio, perché di necessità ogni cosa generata deve avere una fine e c'è un termine di ogni distruzione. Perciò, come diciamo, esso non ha principio, ma sembra essere esso principio di tutte le altre cose e tutte abbrac-

1. *Critica della ragione pura*, Dial. trasc., I, I, Milano, 1976, p. 373.

ciarle e tutte governarle, come dicono quanti non ammettono altre cause oltre l'infinito... ». « Inoltre esso è diverso » prosegue Aristotele « perché è immortale e indistruttibile, come vuole Anassimandro e la maggior parte dei fisiologi ».

Ci sono prove dell'esistenza dell'infinito? Aristotele ne elenca alcune: il tempo (che è manifestamente infinito), la divisione delle grandezze; ma sussistono ragioni anche più profonde che consentono di non ridurre l'infinito a pura immaginazione: « solo se è infinita la fonte da cui è tolta ogni cosa generata non vengono mai meno generazione e distruzione » argomenta Aristotele. « Inoltre, ogni cosa limitata trova il suo limite sempre rispetto a un'altra cosa, con la conseguenza che non ci sarà più limite se sempre una cosa deve essere limitata da un'altra. Ma soprattutto il motivo principale e che produce una difficoltà comune a tutti è che, siccome non sono mai pienamente esauriti nel pensiero se il numero e le grandezze matematiche e tutto quel che c'è oltre i cieli pare che siano infiniti ».²

La difficoltà inerente all'infinito consiste perciò nella sua inesauribilità: ciò che è infinito (Aristotele allude all'esempio dell'insieme dei numeri) non può mai essere presente nella sua totalità nel nostro pensiero. Questa proprietà dell'infinito (cioè dell'*ἄπειρον*) lo caratterizza al punto da poter costituire una sua prima definizione: si può cioè affermare che un qualsiasi insieme di oggetti è illimitato nel caso in cui, volendo individuarne ad uno ad uno tutti gli elementi, non si riesce a formarne un tutto, perché ci sarà sempre e in ogni caso qualche elemento che non avremo considerato. Ad esempio, se consideriamo i numeri interi, essi formano un insieme infinito perché potremo contarne un numero arbitrariamente

2. *Fisica*, 203 b 20.

grande senza mai raggiungere un limite al di là del quale non ci siano altri numeri che non abbiamo ancora contato. «L'infinito (ἄπειρον)» scrive Aristotele «non è ciò al di fuori di cui non c'è nulla, ma ciò al di fuori di cui c'è sempre qualcosa».³ L'illimitato non può dunque in nessun caso essere riguardato come un tutto completo: ciò che è completo ha una fine e la fine è un elemento limitante, mentre l'ἄπειρον indica appunto, per suo significato intrinseco, l'assenza di ogni limite.

All'ἄπειρον resta perciò indissolubilmente associata un'idea negativa, espressione della sua incompletezza e potenzialità non attuata e non attuabile. È per questo motivo che il termine «indefinito» (oppure «illimitato») appare preferibile al termine «infinito» per sintetizzare in una sola parola la sfera di significati attribuibili all'ἄπειρον. L'«infinito» può infatti alludere a un'idea di perfezione estranea a ciò che l'ἄπειρον vuole indicare, e può quindi dissimulare una prima tentazione di esaurire l'incompletezza dell'illimitato designato dalla parola greca in un'attualità che non gli è propria. Tale precisazione è importante, anche perché contiene le ultime ragioni di alcuni tipi di risoluzione di problemi matematici e geometrici ove interviene l'infinito. Il rifiuto di introdurre l'infinito attuale nella matematica greca (a parte poche eccezioni) non si può comprendere se non riconducendosi all'idea negativa cui l'ἄπειρον allude.

Il carattere di non-esistenza implicito nell'ἄπειρον e in ciò che esso non riesce a contenere è indicato dal suo accostamento alla «στέρησις»⁴ cioè alla privazione, che costituisce la necessaria e momentanea premessa di ogni moto evolutivo. Il divenire appare così, in ogni istante, una sintesi del limite (πέρας) e

3. *Fisica*, 207 a 1.

4. Cfr. Aristotele, *Fisica*, 207 b 35 - 208 a 1.

dell'illimitato (ἄπειρον): il limite è ciò che fa esistere concretamente ogni oggetto, conferendogli in ogni istante una sua propria forma e individualità; ed è anche ciò che determina l'ordine logico degli eventi sottraendoli, per quanto è possibile, alla pura casualità. D'altronde non esisterebbe storia né evoluzione di alcun tipo se non esistesse, accanto al limite, un principio di natura opposta che ostacoli la tendenza di ogni oggetto a permanere rigidamente fissato nei contorni della sua esistenza impostagli dal principio del limite. Tale principio è appunto l'illimitato. Esso appare come principio negativo e dissolvente, perché ostacolare l'ordine imposto dal limite significa evidentemente ricondurre la realtà a uno stato informe e disorganizzato, ove ogni cosa perde la sua riconoscibilità come ente concreto e gli eventi appaiono slegati, imprevedibili e suscettibili di un'evoluzione priva di logica. Tale stato è tuttavia la necessaria premessa per l'intervento successivo del limite, che in ogni momento corregge la situazione di indefinita potenzialità implicita nell'illimitato e impone agli eventi uno sviluppo razionale.

Il divenire sembra costituire la tipica sfera d'azione del principio dell'ἄπειρον (è l'ἄπειρον stesso, secondo Anassimandro, a innescarlo con il suo movimento primigenio), che vi appare sia come dissoluzione di forme che come elemento casuale.⁵ Vale anche l'inverso: l'esistenza di un insieme illimitato si spiega mediante l'idea del divenire; i suoi elementi costitutivi, non esistendo tutti simultaneamente, cioè non essendo tutti, ad uno ad uno, attualmente dati, esistono solo sotto la specie di una successione storica, cioè uno *dopo* l'altro, in un susseguirsi interminabile, esattamente come all'1 segue il 2, al 2 segue il 3... e così di

5. Sulla relazione tra casualità e principio materiale (illimitato) cfr. G. Milhaud, *Le hasard chez Aristote et chez Cournot*, in « Rev. de Métaph. et de Morale », 1902, pp. 667-681.

seguito. L'esistenza dell'infinito è in questo senso, per Aristotele, non attuale, bensì potenziale, ed è perciò accostabile al principio materiale dell'esistenza assai più che al principio formale di cui è anzi, diciamo così, l'antitesi.⁶

L'ἄπειρον è tuttavia un principio « divino, immortale e indistruttibile », sembra sostenere Aristotele al pari di Anassimandro. Ma può un principio negativo essere associato al divino? Anassimandro usò l'infinito in due sensi diversi, l'uno, temporale, rapportato all'inesauribilità della successione dei cicli cosmici, l'altro alla permanenza e atemporalità del loro ultimo substrato. In quest'ultimo senso Anassimandro usò l'ἄπειρον come sinonimo di Dio (τὸ θεῖον); ma τὸ θεῖον, fu osservato,⁷ indica, al contrario di θεός, un principio metafisico neutrale cui ben si addice l'idea della pura negatività cui l'ἄπειρον allude. Dio è definibile solo come essere indefinibile, e la teologia negativa, negando tutto di Dio, ne dà così l'unica descrizione possibile: non diversamente avrebbero alluso al « divino » lo Pseudo-Dionigi, Scoto Eriugena, nel *De divisione naturae*, e Niccolò Cusano. Proclo, ricorda il Cusano,⁸ osserva che lo stesso Platone parlò del primo principio negandogli ogni attributo, e la mente divina fu chiamata dagli Orfici, ci attesta M. Ficino, ἄπειρον ὄμμα, cioè « occhio infinito ».⁹

Forse non a torto P. Tannery¹⁰ derivò l'ἄπειρον di Anassimandro, anziché da πέρας (limite), da πείρα (conoscenza, esperienza), e ne fece così l'« inconosci-

6. *Fisica*, 207 a 21.

7. G.B. Burch, *Anaximander, the First Metaphysician*, in « Rev. of Metaph. », 3, 1949, pp. 137-160.

8. *Il Berillio*, XI, in *Opere Filosofiche*, Torino, 1972, p. 650.

9. Cfr. G. Bruno, *De la causa, principio et uno*, a cura di G. Aquilecchia, Torino, 1973, p. 68.

10. « Rev. de Phil. », 4, 1904, pp. 703-707.

bile», l'«insondabile» (Platone usa sovente ἀπειρία per «inesperienza»); ma i due significati sono simili e si specchiano uno nell'altro: tra l'Uno indefinito e la creatura finita s'apre un'invalidabile distanza, cioè un infinito potenziale configurabile come incalcolabile numero di passi successivi che percorsi uno ad uno non portano mai alla meta (Zeus, dice Omero, dista dalla terra per tutta l'incolmabile estensione dell'etere: δι' αἰθέρος ἀτρύγετοιο).¹¹ D'altronde, secondo Aristotele, ciò che non ha limite (πέρας) non è rappresentabile esaurientemente nel nostro pensiero, ed è perciò inconoscibile.

L'illimitato era per Aristotele il substrato materiale degli oggetti visibili, immaginabile per un certo verso come la loro indefinita divisibilità.¹² In effetti un'entità corporea è in sé una forma compiuta, un 'tutto' irripetibile eretto dal principio formale, limitante, sul substrato dell'infinita potenzialità, racchiusa negli infinitesimi che lo compongono. Quando entra in gioco la divisione si comincia a parlare di 'parti' e non più di 'tutto', e la forma appare già compromessa; ma quando la divisione è portata (idealmente) alle conseguenze estreme, cioè agli infinitesimi, la forma originaria appare disgregata, irriconoscibile e ricondotta infine a ciò che potrebbe ritrasformarsi in altro.¹³ Nella divisione all'infinito è implicita una tendenza al ritorno della pura potenza, del principio sostanziale (ὕλη) di ogni esistenza successiva.

11. Cfr. R. Mondolfo, *L'infinito nel pensiero dell'antichità classica*, Firenze, 1956, p. 34. Mondolfo traduce ἀτρύγετος con «inesauribile», «infinito», «invalidabile».

12. *Fisica*, 207 a 22.

13. Aristotele, però, nega che l'avvicinarsi della generazione e della corruzione implichi l'infinito in atto. Pur essendo la disgregazione un ritorno all'illimitato è possibile che il trapasso dalla corruzione alla generazione si svolga senza infrangere i confini del limite (*Fisica*, 208 a 9).