

PICCOLA BIBLIOTECA ADELPHI

794

DELLO STESSO AUTORE:

Breve storia dell'infinito

Discreto e continuo

Gnomon

La dittatura del calcolo

La matematica degli dèi e gli algoritmi degli uomini

La ribellione del numero

Numero e logos

PAOLO ZELLINI

Il Teorema di Pitagora



ADELPHI EDIZIONI

© 2023 ADELPHI EDIZIONI S.P.A. MILANO

WWW.ADELPHI.IT

ISBN 978-88-459-3809-2

Anno

2026 2025 2024 2023

Edizione

1 2 3 4 5 6 7

INDICE

1. Tutto è numero	11
2. Matematica e Giustizia	28
3. Massime pitagoriche	35
4. Il Teorema	49
5. Terne pitagoriche	71
6. La verità del Teorema di Pitagora	78
7. Il Teorema di Pitagora e la nuova analisi	87
8. Somme e differenze di quadrati	108
9. Il δαίμων della matematica	121
<i>Note</i>	131
<i>Indice dei nomi</i>	151

IL TEOREMA DI PITAGORA

Quale significato possiamo attribuire al Teorema di Pitagora, un teorema che risale a diversi millenni fa, che è parte di un bagaglio di nozioni geometriche elementari, e ora assimilate in conoscenze infinitamente più ampie e formalmente perfezionate? Il fatto è che il Teorema in questione è un caso esemplare, un frammento di una scienza del cui sviluppo può rappresentare, da solo, momenti critici e rivoluzionari. Concepito da una cultura arcaica radicalmente diversa dalla nostra, di cui sono state ormai cancellate le tracce, il Teorema di Pitagora andrebbe letto e interpretato, innanzitutto, secondo i canoni di quella cultura. Sarebbe allora un'occasione per capire che la matematica non debba necessariamente limitarsi a standard di verità provata e obiettiva, e possa invece profilarsi come un sapere motivato da un proposito più esteso, coinvolgente l'intero destino dell'essere umano. Per questo sarebbe un arbitrio separare il significato del Teorema dalle speculazioni filosofiche che l'hanno accompagnato per secoli. Purtroppo la separazione è un fatto ormai consumato, che ci ha indotto a sacrificare una scienza potenzialmente intrisa di valori sapienziali, in grado di integrarsi con i massimi problemi

della morale e della metafisica. Con formalismi più avanzati la matematica degli ultimi decenni continua a servirsi dello stesso Teorema come di una formula irrinunciabile per disegni scientifici di vaste proporzioni, ma senza tematizzarne i contenuti specifici e simbolici elaborati nel corso della sua prima ideazione, e usandolo come un mero strumento di calcolo. Uno dei tanti esempi, si direbbe, di come la scienza abbia oggi rinunciato ad applicare l'incalcolabile ricchezza dei suoi contenuti a una sfera più ampia dell'esattezza, in cui potrebbero convivere, accanto alle formule più astratte, i più complessi bilanci tra piacere e dolore, tra vita interiore ed esteriore, tra eccesso e difetto, tra misura e dismisura. Nel *Protagora* (357 a) Platone spiegava che un equilibrato confronto tra pena e diletto dipende dall'aritmetica (ἀριθμητική), dalla scelta del pari o del dispari e da un'arte della misura che pesa eccessi e difetti simili a quelli che ricorrono nel calcolo, e valuta con discernimento la possibilità di un'uguaglianza degli uni con gli altri. Nell'*Etica nicomachea* (1109 a-b) Aristotele collegava l'arte matematica di bilanciare eccessi e difetti al severo consiglio che Circe dava a Odisseo sui pericoli di una navigazione tra l'obbrobrio malvagio di Scilla e il vortice divorante di Cariddi (*Odissea*, XII, 219 sgg.). Ma per rintracciare un esempio più chiaro e radicale, con richiami più espliciti alla matematica, occorre riferirsi a Pitagora in Grecia, o alla geometria degli altari del fuoco del periodo vedico.

In un importante articolo del 1951 in cui tentava un esame complessivo delle conquiste matematiche della prima metà del XX secolo, Hermann

Weyl osservava che la matematica è una scienza antichissima, e che senza i concetti, i metodi e i risultati dei secoli precedenti, retrocedendo fino ai greci, noi non saremmo in grado di capire il significato delle ricerche dei primi decenni del Novecento. Ma Weyl aggiungeva pure che quel significato, così duramente conquistato, si era fatto ormai relativamente estraneo all'intima natura dell'essere umano, passata in subordine di fronte alla luce intensa e brillante, ma sostanzialmente fredda, delle più complesse e stupefacenti teorie matematiche.¹

Possiamo presumere che l'insegnamento di Pitagora non soffrisse di una simile estraneità, e che le sue teorie potessero aiutare a decifrare proprio quella sfera dell'anima che oggi siamo soliti contrapporre alla ragione scientifica. Ricondurre *ogni* cosa al numero aveva come presupposto la possibilità di estendere il campo di influenza degli enti matematici all'ambito interiore, con l'effetto di risolvere, nell'unità di interiore ed esteriore, una delle più tormentose contrapposizioni nella storia del pensiero in Occidente.

La vita e gli insegnamenti di Pitagora (tra il 580 e il 495 a.C. circa), secondo le informazioni che ci sono giunte dalle più note e tarde biografie dello storico Diogene Laerzio e di neoplatonici e neopitagorici quali Giamblico e Porfirio, rispecchiano singolarmente l'orientamento e l'ampiezza di conoscenze e di prospettive della scienza antica, e l'evidenza oggi accertata, per altre vie, di una profonda affinità tra diverse tradizioni. Il Teorema di Pitagora, la ricerca dell'equivalenza tra differenti

figure, la crescita progressiva dei numeri e delle figure geometriche erano patrimonio comune delle rispettive tradizioni matematiche in Grecia, in Mesopotamia, in Cina e nell'India vedica; e tali problemi erano di frequente risolti con le stesse tecniche.

Ricerche risalenti a più di un secolo fa hanno permesso di determinare, con un buon grado di sicurezza, l'origine delle massime di Pitagora trasmesse dai principali biografi antichi, e di collegarle con un solo e medesimo poema identificabile, originariamente, come Ἐρὸς Λόγος, *Discorso sacro*,² nello stile di analoghi Discorsi della tradizione orfica. Ma nella dottrina di Pitagora e dei pitagorici si profila anche, per la prima volta, una stretta combinazione tra numero e sapienza, tra anima ed esattezza, tra le proprietà dei numeri e delle figure geometriche e le leggi che regolano la nostra esistenza. Due secoli dopo Pitagora, Senocrate, a cui fu affidata la direzione dell'Accademia platonica, avrebbe sostenuto che « l'anima è un numero semovente » (Aristotele, *Sull'anima*, 408 b 34 sgg.). Aristotele l'avrebbe confutato, ma l'idea paradossale di un'anima-numero ci fa pensare a quale ricchezza di prospettive e a quale diversa organizzazione dello spirito ci si poteva aprire considerando la sfera dell'anima *sub specie mathematica*. La geometria del nostro destino si esprimeva, in particolare, in un frammento di Alcmeone, discepolo di Pitagora, secondo il quale l'essere umano è mortale perché il circolo della sua vita è imperfetto e spezzato, e l'inizio del percorso non coincide mai con la sua fine. Nella *Vita nuova* (XII, 4) Dante riprese pitagoricamente la metafora del circolo

per rimarcare la nostra imperfezione. Egli ricordava l'apparizione in sogno di un giovane vestito di bianco che gli parlava « oscuramente », in tono oracolare, e gli diceva piangendo: « Ego tanquam centrum circuli, cui simili modo se habent circumferentie partes: tu autem non sic » (io sono come il centro del cerchio rispetto al quale tutti i punti della circonferenza sono equidistanti, tu invece no). In questa occasione lo stile oracolare di Dante era perfettamente coerente con quello di Pitagora. Vale la pena notarlo non solo per stabilire una corrispondenza ideale tra Dante e Pitagora – un esempio della necessità del parlare per simboli –, ma anche per capire come nella matematica si possano trovare formule o immagini per alludere con incomparabile esattezza al fondamento più oscuro e insondabile del nostro essere.

Secondo Giamblico (*Vita pitagorica*, d'ora in avanti VP) Pitagora si incontrò da giovane a Sidone con i discendenti di Moco, profeta e studioso di scienze naturali, e con ierofanti fenici, iniziandosi così ai misteri celebrati a Biblo, a Tiro e in molte parti della Siria. Di lì si sarebbe imbarcato per l'Egitto, facendosi trasportare da marinai egizi che ebbero modo di scorgere, nelle fattezze e nel comportamento di Pitagora, qualcosa di sovrumano, fino a convincersi che non un semplice uomo, ma un demone divino (δαίμονα θεῖον), si stava dirigendo con loro dalla Siria all'Egitto (VP, 16).

Giamblico ci informa che Pitagora trascorse ventidue anni in Egitto, nei « penetrali dei templi », studiando astronomia e geometria, fino al momento in cui fu preso prigioniero dai soldati di Cambi-

se e condotto a Babilonia. Proprio a Babilonia, a quanto riferisce anche Porfirio (*Vita di Pitagora*, 6), avrebbe frequentato per dodici anni magi e caldei, e sarebbe stato iniziato ai loro riti e al culto divino, fino a raggiungere la vetta delle conoscenze scientifiche, aritmetiche e musicali. A cinquantasei anni Pitagora si sarebbe trasferito a Samo, e in seguito, adducendo come motivo l'indifferenza dei sami per la sua dottrina, sarebbe partito per l'Italia, alla volta di Crotona. Ivi avrebbe fondato una scuola di « filosofi », la maggioranza dei quali erano semplici uditori o « acusmatici ». È stato ipotizzato che Pitagora fosse giunto fino in India. L'ipotesi non è accreditata, ma è certo, comunque, che tra la geometria pitagorica e quella vedica ci sono somiglianze tali da far pensare a un'estesa trasmissione del sapere, a un sottile intreccio di scambi e a una capillare comunicazione di problemi e di tecniche di risoluzione. La geografia delle culture e dei paesi frequentati da Pitagora lascia emergere un mondo di ampiezza impensabile, di cui possiamo cercare di ricomporre l'unità con lo studio di resti e frammenti di tradizioni ispirate a principi straordinariamente affini.

Le biografie riferiscono che Pitagora fu pure ispirato dai misteri di Eleusi, dai circoli iniziatici presso i celti e in Iberia (VP, 151) e dalle dottrine orfiche. Giamblico cita il *Discorso sacro* in cui Pitagora parla di quando fu iniziato ai misteri a Libetro, antico centro della Pieria, in Macedonia: « Aglaofamo, sacerdote responsabile delle iniziazioni, mi rivelò che Orfeo, figlio di Calliope, il quale era stato istruito dalla madre sul monte Pangeo, aveva detto: l'essenza eterna del numero è il princi-

pio provvidenzialissimo dell'universo cielo, della terra e della natura intermedia tra l'uno e l'altra » (VP, 146).

Dunque sarebbe stata inizialmente legata all'orfismo la dottrina pitagorica secondo cui tutte le cose sono simili ai numeri, cioè sono costituite secondo la natura dei numeri, perché « tutte le cose al numero consentono (ἀριθμῶ δέ τε πάντ' ἐπέουικεν) » (VP, 162). In particolare, commenta Giamblico, Pitagora derivò dagli orfici la dottrina per cui la stessa essenza degli dèi è definita dal numero (VP, 146-47). Con Pitagora la matematica fu per la prima volta, in Occidente, collegata a qualcosa di divino o di demonico, in un modo esplicitamente registrato dalle fonti. Il suo destino, in fondo, dipese in buona parte da questo iniziale impratur, un segno della sua appartenenza a una sfera superumana, ma anche esposta alle possibili ambiguità di un genere che non stava propriamente né in cielo né in terra, e che era quindi esposto a una doppia o tripla influenza, orientata al mondo divino come pure terreno o infero. Tracce evidenti di questa doppia o tripla natura sopravvivono ancora oggi negli scritti di celebri matematici, come, tra gli altri, Hermann Weyl, John von Neumann e Luitzen Egbertus Jan Brouwer.

Pitagora era visto come un δαίμων divino (θεῖον), e il numero era considerato « la radice che consente ai mortali, agli dèi e ai demoni di continuare a esistere » (VP, 146). Dunque la tesi principale del pitagorismo, incentrata, come ricorda Aristotele nel libro I della *Metafisica*, sulla fede che tutte le cose esistono per imitazione – oppure, come dice Platone, per partecipazione – dei numeri,

doveva essere paragonata al mondo demonico, per salvaguardarne la sicurezza e la stabilità.

Le cose *sono* numeri, secondo l'espressione pitagorica più radicale, che altre fonti attenuavano affermando che le cose sono *come* numeri. Lo ricordava pure, lo scorso secolo, Erwin Schrödinger alludendo alla celebre scoperta di Pitagora concernente le suddivisioni intere o razionali di una corda in grado di produrre intervalli musicali: « Tali intervalli, integrati nell'armonia di un canto, possono emozionarci fino alle lacrime perché parlano, per così dire, direttamente alla nostra anima ». ³ E i numeri quadrati, ricordava ancora Schrödinger, avevano un rapporto con la giustizia, identificata specialmente con il primo intero quadrato, cioè 4. ⁴

Pitagora sarebbe stato il primo a dare alla filosofia il suo nome, definendola aspirazione alla sapienza (σοφία) (VP, 159). Ma c'era una grande novità rispetto ai filosofi che cercavano l'origine delle cose e la sostanza della natura (φύσις) in elementi come l'acqua, il fuoco, l'aria o la terra. Questi erano peraltro, più che elementi materiali, *principi nell'aspetto della materia* (ἐν ὕλης εἶδει, Aristotele, *Metafisica*, 983 b 7), come nel caso del fuoco, in cui doveva trovarsi, per Eraclito (22 B 118 DK), la natura stessa dell'anima, la quale era a sua volta un principio, una ἀρχή. ⁵ Pitagora cercava invece i principi senza ancorarli a qualche aspetto della ὕλη, e sosteneva che il vero e ultimo tessuto della realtà era qualcosa di completamente avulso dalla materia, che doveva essere identificato, appunto, con il numero. L'avrebbe precisato Giamblico (VP, 159-60), nel ricordare che per Pitagora la sa-

pienza era « scienza della verità degli enti », e che « per enti egli intendeva ciò che è immateriale, eterno e soltanto agente, vale a dire incorporeo », mentre le cose corporee « solo per partecipazione (κατὰ μετοχήν) hanno qualcosa in comune con ciò che realmente è ». Anche gli atomisti Leucippo e Democrito, a quanto riferisce Aristotele (*Sul cielo*, 303 a), dicevano che ogni cosa esiste nei numeri o si origina dai numeri.

Se nei numeri si doveva cercare la verità degli enti, viene pure da chiedersi se il concetto pitagorico di numero poteva essere a sua volta fondato su un'idea ancora più originaria, in grado di prospettare, nelle linee più generali, quelle figure che avrebbero poi costituito gli elementi della scienza geometrica. Dal *Timeo* di Platone, in cui è evidente l'ispirazione pitagorica, apprendiamo che i triangoli erano gli elementi di cui era formata la natura, ma, in base al concetto pitagorico di numero come insieme di punti disposti in un certo ordine nello spazio, si deve pensare che i triangoli fossero pensati in termini di speciali *allineamenti* di questi stessi punti. Gli elementi (elemento = στοιχεῖον) consistevano in origine, verosimilmente, in punti o atomi disposti in file ordinate. Nella geometria vedica si trattava di mattoni (per costruire l'altare di Agni), e non di punti, ma per rispettare la direttiva *teorica* di ingrandire gli altari mantenendone inalterata la forma, i mattoni avevano la stessa funzione astratta dei punti geometrici dei pitagorici: la crescita delle figure geometriche di cui era composto l'altare di mattoni avveniva grazie a tecniche, come l'uso dello gnomone, analoghe a quelle usate dai pitagorici per far

crescere i numeri-punti nello spazio. Omero usa in diverse occasioni *στοῖχος* per denotare file di armi oppure schiere di soldati (*Iliade*, X, 473; XXIII, 358), e a ciò fa riscontro il ritrovamento di iscrizioni risalenti al IV secolo a.C. in cui *στοῖχος* si riferisce allo stare in fila nel linguaggio militare.⁶

Aristotele (*Metafisica*, 985 b-986 a) notava che, essendo per i pitagorici i numeri princìpi di tutti gli esseri, da essi si poteva trovare una molteplicità di analogie con tutto ciò che esiste e diviene. Tutto il cielo era numero e armonia. Gli stessi pitagorici, ricorda Aristotele (*Metafisica*, 986 a), classificavano i princìpi dell'esistente in una doppia colonna di elementi opposti: Limite e Illimitato, Dispari e Pari, Uno e Multiplo, Destra e Sinistra, Maschio e Femmina, Riposo e Movimento, Rettilineo e Curvo, Luce e Oscurità, Buono e Cattivo, Quadrato e Rettangolo.

Il numero poteva a sua volta governare questa sistematica dicotomia, a cominciare dalla duplicità di Limite e Illimitato, le cui rappresentazioni numeriche erano altrettante mediazioni salvifiche. Quanto alla differenza tra Quadrato e Rettangolo, è importante segnalare la proprietà specifica ed esclusiva del quadrato, declinata in conformità alla concezione pitagorica dei numeri come configurazioni di punti nello spazio. Ingrandendo un quadrato dal seme iniziale di un unico punto mediante gnomoni formati da un numero *dispari* di punti, non si alterano mai i rapporti dei lati, sempre uguali a 1. All'opposto, ingrandendo con un numero *pari* di punti un rettangolo da un seme iniziale di due punti, si trovano rapporti tra i lati

sempre diversi (figura 1).⁷ Nella crescita del rettangolo si ha allora un *indefinito* divenire in altro (ἄλλο), mentre nella crescita del quadrato il divenire si svolge nel segno di un'invarianza della stessa identica forma e degli stessi rapporti.

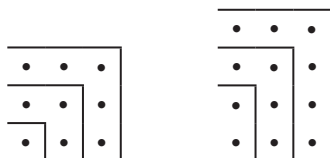


Figura 1

Di qui l'analogia tra ἄπειρον e ἄλλο, tra l'infinito e l'altro, che dovette segnare tutta la concezione pitagorica della natura. La matematica poteva rappresentare un principio di compensazione in ogni coppia di opposti, perché mostrava numerosissimi esempi in cui il Limite e l'Illimitato erano esemplificati negli stessi processi di accrescimento. Non a caso Aristotele avrebbe spiegato che la φύσις va considerata innanzitutto sotto il profilo dell'accrescimento⁸ e che l'essenza o *quidditas* di una cosa deve essere concepita come *il fatto, per quella cosa, di continuare ad essere ciò che essa era* (τὸ τί ἦν εἶναι).⁹ Quindi l'essenza di una cosa, la οὐσία, era il segno di una stabilità nel flusso del divenire.

Pitagora sembra per un verso differenziarsi nettamente dai primi sapienti, e in particolare dal suo maestro Ferecide di Siro, il quale si esprimeva ancora in un linguaggio che ne faceva il diretto epigono di Esiodo, l'autore della *Teogonia*.